

INTEGRALI

PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

E' una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$

INTEGRALI INDEFINITI

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

INTEGRALI DEFINITI

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

INTEGRALI IMMEDIATI DELLE FUNZIONI FONDAMENTALI

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

INTEGRALI LA CUI PRIMITIVA E' UNA FUNZIONE COMPOSTA

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \text{ con } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \sin[f(x)] f'(x) dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos[f(x)] f'(x) dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \int (1 + \tan^2 [f(x)]) f'(x) dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 [f(x)]} dx = \int (1 + \cot^2 [f(x)]) f'(x) dx = -\cot f(x) + c$$

$$\int \frac{f(x)}{1+f(x)^2} dx = \arctan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \arcsin x + c$$

INTEGRAZIONE PER PARTI**CASO INDEFINITO**

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

CASO DEFINITO

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(x) dx$$

Sostituzione: $t = g(x)$

PASSO 1

Ci sono due opzioni:

1. Invertire e poi derivare

$$x = g^{-1}(t) \Rightarrow dx = D[g^{-1}(t)] dt$$

2. Derivare direttamente:

$$t = g(x) \Rightarrow dt = D[g(x)] dx$$

PASSO 2

Sostituire nella funzione

$$t \Leftrightarrow g(x) \text{ e le } x \Leftrightarrow g^{-1}(t)$$

PASSO 3

Se l'integrale è definito cambio gli estremi di integrazione

$$x = a \Rightarrow t = g(a)$$

$$x = b \Rightarrow t = g(b)$$

Quindi ottengo:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f[g^{-1}(t)] \cdot D[g^{-1}(t)] dt$$

PRINCIPALI SOSTITUZIONI

Sia $R(t)$, una qualsiasi funzione razionale (rapporto di polinomi).

$$\int R(f(x)) f'(x) dx$$

$$f(x) = t \Rightarrow f'(x) dx = dt$$

$$\text{Sostituendo: } \int R(t) dt$$

ESPONENZIALI

$$\int R(e^{\alpha x}) dx$$

$$e^{\alpha x} = t \Rightarrow \alpha x = \ln t \Rightarrow dx = \frac{1}{\alpha t} dt$$

$$\text{Sostituendo: } \int R(t) \frac{1}{\alpha t} dt$$

LOGARITMI

$$\int R(\ln x) \frac{1}{x} dx$$

$$\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$\text{Sostituendo: } \int R(t) dt$$

POTENZE

$$\int R(x^\alpha) x^{\alpha-1} dx$$

$$x^\alpha = t \Rightarrow \alpha x^{\alpha-1} dx = dt \Rightarrow x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} dt$$

$$\text{Sostituendo: } \frac{1}{\alpha} \int R(t) dt$$

RADICI DI POLINOMI DI PRIMO GRADO

$$\int R(\sqrt{ax+b}, x) dx$$

$$\sqrt{ax+b} = t \Rightarrow ax+b = t^2 \Rightarrow x = \frac{t^2-b}{a} \Rightarrow dx = \frac{2t}{a} dt$$

$$\text{Sostituendo: } \int R\left(t, \frac{t^2-b}{a}\right) \frac{2t}{a} dt$$

INTEGRALI IN SENO, COSENO E TANGENTE**SOSTITUZIONE 1**

$$\int R(\sin x) \cos x dx$$

$$\text{Porre: } \sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$$

$$\text{Sostituendo: } \int R(t) dt$$

$$\int R(\cos x) \sin x dx$$

$$\text{Porre: } \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

$$\text{Sostituendo: } -\int R(t) dt$$

SOSTITUZIONE 2

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

Parametrizzazione di seno e coseno:

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\text{Sostituendo: } \int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

SOSTITUZIONE 3

$$\int R(\tan x, \sin^2 x, \cos^2 x) dx$$

$$\tan x = t \Rightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\text{Sostituendo: } \int R\left(t, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$$

ALCUNI INTEGRALI CHE E' BENE RICORDARE O TENERE SOTTO MANO

$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x$$

$$\int \tan x = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right) \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{x}{\sqrt{a}} + c$$

$$\int a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x$$

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A \log |ax+b|}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a} \ln |ax^2+bx+c| + \frac{2aB-bA}{a\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + k \quad \text{se } \Delta < 0$$

$$\int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2aB}{a\sqrt{-\Delta}} \arctan \left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \right) + k$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+c} dx = \frac{A}{2a} \ln |ax^2+c| + \frac{B}{\sqrt{ac}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{c}} x \right) + k$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{1}{a(ax+b)^{n-1}}$$